Exercice 1 : Points

1.	$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$	--	1
2.	$m\vec{a} = \sum \vec{F}$	--	1
	$m\vec{a} = \vec{P}$	--	1
3.	$a_z(t) = -g$	--	1
4.	$v_z(t) = dz(t)/dt$	--	1
	$\Rightarrow v_z(t) = -gt + v_0$	--	1
5.	$v_z(t_0) = 0$	--	1
	$\Rightarrow t_0 = v_0 / g$	--	1
6.	$z_{\max} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} + h$	--	1
7.	$\frac{1}{2}gt_1^2 - v_0 t_1 - h = 0$	--	1
	eq. du 2nd ordre, discriminant : $\Delta = v_0^2 + 2gh$	---------------------------	1
	on ne garde que la solution $t_1 > 0$	-------------------------------------	1
	$t_1 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$	--	1
8.	$t_0 = 2\,\mathrm{s}$	--	1
	$t_1 = 5\,\mathrm{s}$	--	1
	$z_{\max} = 45\,\mathrm{m}$	--	1

Exercice 2 :

1.	$i(t) = dq(t)/dt$	--	1
	$i(t) = q_0\omega\cos(\omega t)$	--	1
2.	$q(t) = Cu_C(t)$	--	1
	$u_C(t) = (q_0/C)\sin(\omega t)$	--	1
3.	$u_L(t) = L\,di(t)/dt$	--	1
	$u_L(t) = -Lq_0\omega^2\sin(\omega t)$	--	1
4.	$u_R(t) = Ri(t)$	--	1
	$u_R(t) = Rq_0\omega\cos(\omega t)$	--	1
5.	$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$	--	1
	Car dipoles en série $\Rightarrow$ additivité des tensions	-------------------	1
	$u(t) = \frac{q_0}{C}(1 - LC\omega^2)\sin(\omega t) + q_0 R\omega\cos(\omega t)$	---------------------------	1

Note finale = total des points * 20/27 puis arrondi au 1/4 point supérieur

UNIVERSITE PAUL SABATIER	LICENCE STS

Année universitaire 2009-2010

LICENCE 1 Parcours PC - PHYSIQUE

Devoir surveillé 2
(45 min.)

---

1 Equations aux dimensions (6 pts)

1. Établir les équations aux dimensions des deux grandeurs suivantes :
   – a) la permittivité du vide ε_0 qui apparaît dans l'expression de la norme de la force d'interaction F_C entre deux charges électriques q_1 et q_2 distantes de r (loi de Coulomb) :

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

   Réponse : $[\varepsilon_0] = M^{-1}L^{-3}T^4I^2$. *(2 pts)*

   – b) la perméabilité magnétique du vide μ_0 qui apparaît dans la loi de Laplace qui donne l'expression de la norme de la force d'interaction F_L entre deux fils conducteurs parallèles de longueur L, placés dans le vide, séparés par une distance d et parcourus par des courants I_1 et I_2 :

$$F_L = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{L}{d}$$

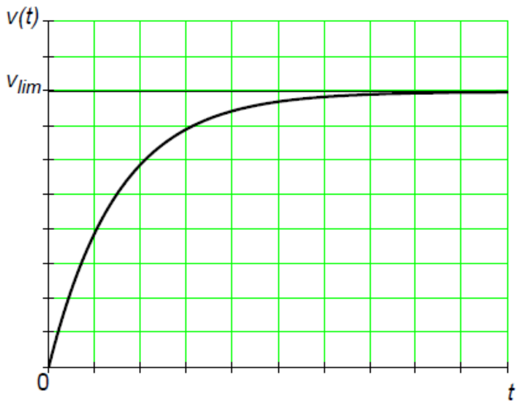
   Réponse : $[\mu_0] = MLT^{-2}I^{-2}$. *(2 pts)*

2. Vérifier l'homogénéité de la relation $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$ où c représente la célérité de la lumière dans le vide.
   Réponse : On a bien $M^{-1}L^{-3}T^4I^2MLT^{-2}I^{-2}LT^{-1} = 1$. *(2 pts)*

2 Chute d'une bille (11 pts)

On étudie dans un référentiel terrestre supposé galiléen, le mouvement d'une sphère tombant verticalement dans le champ de pesanteur terrestre. La sphère est abandonnée, sans vitesse initiale, d'un point O situé à l'altitude h dans le champ de pesanteur dont la norme sera considérée comme constante et égale à $g = 9,80$ m.s^{-2}. La poussée d'Archimède est négligeable et la sphère n'est soumise qu'à l'action de son poids $\mathbf{P}$ et à une force de frottement visqueux $\mathbf{F} = -\alpha\mathbf{v}$. On choisira l'axe vertical Oz dirigé vers le bas.

1. Le graphique ci-dessous donne l'allure des variations de la vitesse en fonction du temps, v_{lim} étant la vitesse limite atteinte par la sphère.
   a) En observant la courbe $v = f(t)$, indiquer comment varie l'accélération de la sphère en fonction du temps.
   b) Donner les composantes des forces qui s'appliquent sur la sphère. Sans résoudre l'équation différentielle en v, en déduire l'expression de l'accélération de la sphère et justifier la réponse donnée à



la question précédente.
Réponse : L'accélération $a(t)$ *s'écrit* $a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$. *Elle est donc donnée par la valeur du coefficient directeur de la tangente à la courbe* $v = f(t)$ *à l'instant t considéré. Or, la pente de la tangente à la courbe* $v(t)$ *diminue au cours du temps. L'accélération diminue donc au cours du temps et s'annule lorsque la courbe tend vers l'asymptote horizontale. (1 pt)*

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{r|l} & 0 \\ & 0 \\ R & mg \end{array} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{F} = \begin{array}{r|l} & 0 \\ & 0 \\ R & -\alpha v \end{array}$$

. La loi fondamentale de la dynamique conduit donc à : $a = g - \frac{\alpha v}{m}$. *Lorsque la vitesse v de la sphère augmente, l'accélération de la sphère diminue. (3 pts)*

2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v.
Réponse : La projection de la loi fondamentale de la dynamique sur l'axe Oz *conduit à :* $\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m} v = g$. *(1 pt)*

3. Résoudre cette équation différentielle et donner l'expression de sa solution générale.
Réponse : SGESSM : $v(t) = Ce^{-\frac{\alpha}{m}t}$. *SPE :* $v = \frac{mg}{\alpha}$. *SGE :* $v(t) = \frac{mg}{\alpha} + Ce^{-\frac{\alpha}{m}t}$ *(3 pts)*

4. En utilisant les conditions initiales, déterminer l'expression de $v(t)$.
Réponse : $v(t = 0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{mg}{\alpha}$ *donc* $v(t) = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)$. *(1,5 pts)*

5. Lorsque la sphère a atteint sa vitesse limite v_{lim}, la norme de la force de frottement F est-elle supérieure, inférieure ou égale à la norme du poids P ? Justifier la réponse.
Réponse : Lorsque la vitesse limite v_{lim} *est atteinte, le mouvement de la sphère est rectiligne uniforme. D'après la première loi de Newton, P = F. (1,5 pts)*

3 Accroissement d'une population (3 pts)

L'accroissement au cours du temps de la population P d'un pays est proportionnel à cette population. La population double tous les 50 ans.
Etablir la loi d'évolution $P(t)$ de cette population. On notera P_0 la population à l'instant initial et on travaillera dans le système international d'unités.
Réponse : L'accroissement de la population obéit à une loi du type $\frac{dP(t)}{dt} = kP(t)$. *La population s'exprime donc sous la forme* $P(t) = P_0 \exp(kt)$. *Son doublement tous les 50 ans (soit* $1{,}58.10^9$ *s en SI) conduit à* $k = 4,39.10^{-10}\ s^{-1}$. *(3 pts)*

Université Paul Sabatier Toulouse III

Licence 1 – Semestre 1
Parcours PC

/22,5

CORRECTION PHYSIQUE 2009-2010
DS3 – 45 min

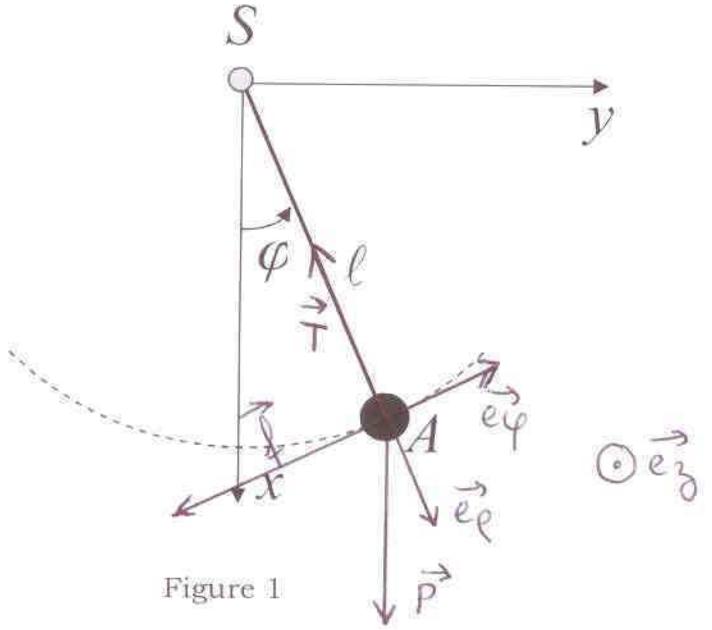


Figure 1

1 → **1**- Représenter sur la figure 1 les vecteurs de la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ associée au point A. (−0,5) si $\vec{e_z}$ oublié

2- Etablir le bilan des forces s'appliquant sur le point matériel A.

1,5 → Poids : $\vec{P} = m\vec{g}$ $\vec{T}$: tension du fil $\vec{f}$: force de fts

1,5 → Représenter ces forces sur la figure 1.
Les exprimer dans la base polaire.

0,5 $\vec{T} = -T\,\vec{e_\rho}$

1 $\vec{P} = mg(\cos\varphi\,\vec{e_\rho} - \sin\varphi\,\vec{e_\varphi})$

1 $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha v\,\vec{e_\varphi}$

3- Donner l'expression du vecteur $\vec{SA}$.

1 $\vec{SA} = \rho\,\vec{e_\rho}$ $\rho = \ell$

4- Donner sans démonstration les dérivées temporelles des vecteurs $\vec{e}_\rho$ et $\vec{e}_\varphi$, l'observateur se trouvant dans le référentiel du laboratoire.

1 + 1 $\left(\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right)_{/R} = \dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$ $\left(\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt}\right)_{/R} = -\dot{\varphi}\,\vec{e_\rho}$

5- Déduire des deux questions précédentes les expressions des vecteurs vitesse $\vec{v}(A)$ et

1 accélération $\vec{a}(A)$. $\vec{v}(A) = \frac{d\vec{SA}}{dt}\Big) = \rho\left(\frac{d\vec{e_\rho}}{dt}\right)_{IR} = \rho\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi}$

1 $\vec{a}(A) = \frac{d\vec{v}(A)}{dt}\Big)_{IR} = \rho\ddot{\varphi}\,\vec{e_\varphi} + \rho\dot{\varphi}\left(\frac{d\vec{e_\varphi}}{dt}\right)_{IR}$

$= \rho\ddot{\varphi}\,\vec{e_\varphi} - \rho\dot{\varphi}^2\,\vec{e_\rho}$

6- Par application du principe fondamentale de la dynamique et après projection de l'équation dans la base polaire, donner l'équation différentielle du second ordre ne

0,5 faisant intervenir que φ. $\sum \vec{F} = m\vec{a}(A)$

0,5 $\Leftrightarrow mg\cos\varphi\,\vec{e_\rho} - mg\sin\varphi\,\vec{e_\varphi} - \alpha\rho\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi} - T\vec{e_\rho} = m\vec{a}(A)$

1 $\vec{e_\rho}: \begin{cases} mg\cos\varphi - T = -m\rho\dot{\varphi}^2 & (1) \\ -mg\sin\varphi - \alpha\rho\dot{\varphi} = m\rho\ddot{\varphi} & (2) \end{cases}$ $\vec{e_\varphi}:$

7- Dans le cas des petites oscillations, simplifier l'expression obtenue à la question précédente et la mettre sous la forme :

$$\ddot{\varphi} + \frac{1}{\tau}\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \qquad (1)$$

On donnera l'expression de ω_0 et τ. Calculer les valeurs numériques correspondantes.

1 (2) $\Leftrightarrow \ddot{\varphi} + \frac{\alpha}{m}\dot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0$ avec $\sin\varphi \simeq \varphi$

0,5 + 0,5 $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} = 7 \text{ rad.s}^{-1}$

0,5 + 0,5 $\tau = \frac{m}{\alpha} = 0,1$ sec

8- Donner l'équation caractéristique correspondante à l'équation (1).

1 $r^2 + \frac{r}{\tau} + \omega_0^2 = 0$

9- Calculer le discriminant Δ. Conclure.

$\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2$

1 $\Delta = -96 < 0$

0,5 $\Rightarrow$ mouvement oscillatoire amorti

10- Donner les deux solutions r_1 et r_2. En déduire la solution à l'équation (1).

1 $r_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm j\frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -5 \pm 4,9\,j$

$\varphi(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 e^{r_2 t} = k_1 e^{(-5+4,9j)t} + k_2 e^{(-5-4,9j)t}$

1 $\varphi(t) = e^{-5t}\left[k_1 e^{4,9jt} + k_2 e^{-4,9jt}\right]$

11- A l'instant initial, $\varphi = \varphi_0$ et $\dot{\varphi} = 0$. Donner l'expression de $\varphi(t)$.

1 $\begin{cases} \varphi(t=0) = \varphi_0 = k_1 + k_2 \\ \dot{\varphi}(0) = 0 = -5(k_1+k_2) + 4,9\,j(k_1 - k_2) \end{cases}$

0,5 on trouve $k_1 = \frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{\varphi_0}{2j}\cdot\frac{50}{49}$

et $k_2 = \frac{1}{2}\varphi_0 - \frac{\varphi_0}{2j}\cdot\frac{50}{49}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 e^{-5t}\left[\cos\omega t + \frac{1}{2\tau\omega}\sin\omega t\right]}$

avec $\frac{50}{49} = \frac{1}{2\tau\omega}$